A més de destacar la claredat que caracteritza els resums de teoria i la resolució explicada dels problemes, hem de valorar positivament que estigui escrit en català i que s'hagi procurat utilitzar dades actualitzades i que pertanyen al nostre entorn. És apropiat com a bibliografia suplementària d'un curs de Descriptiva i Càlcul de Probabilitats impartit en un primer cicle de nombroses titulacions. Faltaria la part de tests d'hipòtesis i intervals de confiança per cobrir completament el contingut de la majoria d'assignatures introductòries a la inferència estadística. Esperem el Volum II per tenir-ho cobert.

Mercè Farré
UAB

Problemes

Recordeu que podeu trobar les solucions dels problemes de les Olimpíades a l'adreça:

`http://pie.xtec.es/recursos/mates/aqui/agenda.htm#OLIMP`

on, per cert, hi trobareu una col·lecció interessantíssima de problemes.

Us recomanem també que visiteu la web de la SCM on trobareu els enunciats i solucions de les proves Cangur-99 celebrades el passat mes de març a Catalunya, les Illes Balears i Castelló.

`http://www.iec.es/societat/scm/CAT/cangur_c.htm`

També preguem als nostres lectors que si fan servir Tex o Latex per escriure les seves solucions, les enviïn per correu electrònic a l'adreça:

`pelegri.viader@econ.upf.es`

així com qualsevol proposta o suggeriment.

Problemes proposats

Aquesta vegada només hem rebut un suggeriment per un problema. Us el proposem junt amb tres problemes de competicions escolars soviètiques.

A36. (Proposat per Josep Pla de la UB.) *Una mica de papiroflèxia.* En un full blanc de paper dibuixeu-hi un punt. Trieu una vora del full i porteu el punt sobre la vora, tot doblegant el full i marcant bé el doblec. Repetiu l'operació amb diferents llocs de la mateixa vora. Podríeu caracteritzar la família de rectes (doblecs) que queden marcades al full?

A37. (Competició nacional russa. Final 1984. Nivell setze anys.) Sense utilitzar càlcul diferencial, qui és més gran 2/201 o ln(101/100)?

A38. (Competició nacional russa. Final 1962. Nivell setze anys.) Quina és la màxima àrea que pot tenir un triangle si els costats a, b, c han de complir $0 < a \leq 1 \leq b \leq 2 \leq c \leq 3$?

A39. (Competició nacional russa. Final 1965. Nivell setze anys.) Un turista arriba a Moscou en tren. Durant tot el dia passeja a l'atzar pels carrers de la ciutat. Sopa a prop de la plaça Roja i decideix tornar a l'estació caminant per aquells carrers per on només ha passat un nombre imparell de vegades. Pot fer-ho?

Problemes proposats a SCM/Notícies 9

A30. (Proposat per Anton Montes de la UPC.) Volem organitzar una lliga de futbol entre m equips, de manera que cada equip jugui contra tots els altres. A continuació volem agrupar els partits en jornades, de tal manera que en cada jornada juguin tots els equips un únic partit (si m és imparell, un equip descansa). Doneu un algorisme per aconseguir-ho.

Solució: (Esteve Casas Juncà, de Sant Celoni). Suposem m parell, tal i com l'enunciat suggereix. Farem servir una matriu $A = (a_{ij})$, on $a_{ij} = k$ significarà que l'equip i ha jugat amb l'equip k la jornada j. Inicialitzem la matriu a 0. Quan s'hagi d'emparellar un equip i en la jornada j caldrà:

a) Mirar que $a_{ij} = 0$.

b) Buscar el primer $a_{i+s,j}$, $(s \neq 0)$ tal que $a_{i+s,j} = 0$ i que anteriorment no s'hagi enfrontat amb l'equip i. Això últim es pot comprovar de vàries maneres, una seria recórrer la fila $i + s$ des de 1 fins a $j - 1$ i veure que $a_{i+s,\ell} \neq i$, $1 \leq \ell \leq j - 1$.

Fixada la columna, recorrem les files buscant, per cada equip que no està emparellat el primer sota seu que tampoc ho està i amb el qual no ha jugat encara. Marquem a_{ij} corresponentment i continuem el procés fins que tothom està emparellat (podem tenir una variable *emparellats*, inicialitzada a zero per cada jornada, que es vagi incrementant després de cada emparellament fins a que prengui el valor $m/2$). Incrementem la jornada i tornem a començar.

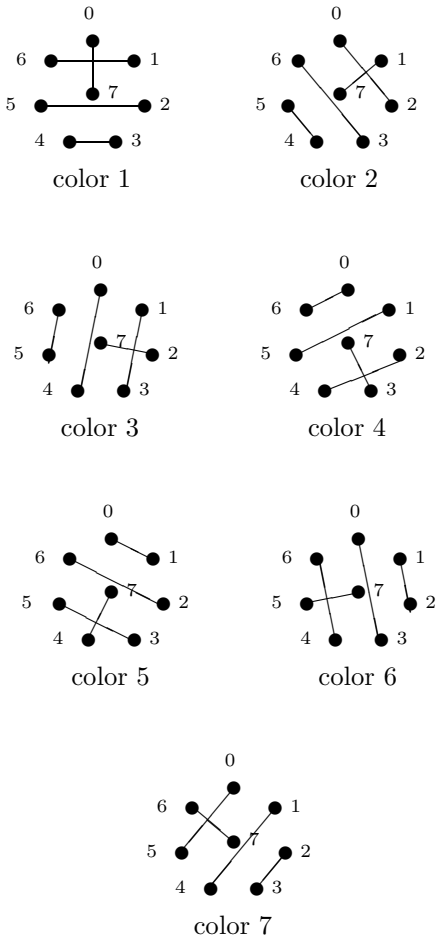
Altres idees: (Solució d'A. Montes). Donat un conjunt de m equips formem el graf que té per vèrtexs els equips i per arestes els partits. Construïm així el graf complet K_m. El problema d'agrupar els partits en jornades correspon ara a colorejar les arestes del graf K_m amb $m-1$ colors. Cada color correspondrà a una aresta. Com és obvi, si m és senar, això no serà possible amb $m - 1$ colors però si ho és amb m colors.

La solució és la següent:

Considerem els vèrtexs numerats $\{v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}\}$. Si considerem m parell, tal i com l'enunciat suggereix, posem el vèrtex v_{m-1} al centre d'un cercle i els restants vèrtexs, $v_0, \ldots, v_{m-2}$, sobre el cercle formant un polígon regular de $m - 1$ vèrtexs. Colorejarem amb el color i l'aresta radi $v_{m-1}v_i$ i totes les paral·leles a l'anterior, és a dir $v_{i-j \bmod m-1}\ v_{i+j \bmod m-1}$, per j de 1 fins a $m/2 - 1$.

És obvi que cada color s'aplica a $m/2$ arestes i que s'utilitzen $m - 1$ colors. El graf K_{2p} queda d'aquesta manera colorejat amb $2p - 1$ colors.

Posem un exemple de colorejat per $m = 8$.



A31. (IMTT) Una màquina dóna canvi de cinc duros en duros. Passa, però, que està espatllada i quan introduïm un duro, ens dóna 5 monedes de cinc duros. En Pere té un duro. Pot, d'alguna manera, usar la màquina fins acabar tenint el mateix nombre de monedes de les dues classes?

Solució: (Esteve Casas Juncà de Sant Celoni). Anomenem s i t el nombre de vegades que en Pere introdueix una moneda de duro a la màquina i una moneda de cinc duros respectivament. Si en Pere acaba amb el mateix nombre de monedes en algun moment determinat,

$$\underbrace{1+5t-s}_{\#\text{ mon. 5 PTA}} = \underbrace{5s-t}_{\#\text{ mon. 25 PTA}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+6t = 6s, \text{ impossible.}$$

A32.(*Un conte embolicat* de Lewis Carroll). Dos viatgers surten de casa a les 3 de la tarda i tornen a les 9 del vespre després de recórrer un tros pla, pujar una muntanyeta i desfer aquest mateix camí per tornar. En el tros pla han caminat a una velocitat de 4 km/h i en pujar i baixar la muntanyeta, a 3 km/h i 6 km/h respectivament. Trobeu la distància recorreguda i, amb un error de menys de 1/2 hora, calculeu l'hora en què arriben al cim de la muntanyeta.

Solució: (Jaume Sans Ciurana de l'Hospitalet). Si el tram pla té x km i el pendent té y km, podem escriure

$$2\,\frac{x}{4}+\frac{y}{3}+\frac{y}{6}=6 \quad\Rightarrow\quad \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=6 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x+y=12.$$

Recorren doncs, 24 km.

El temps del viatge d'anada ha d'estar comprès entre 3 h si no hi hagués gens de pujada i 4 h si tot fos pujada. 3 1/2 h és doncs la durada del camí d'anada amb error de menys de 1/2 h. Les 6 h 30 min seria el resultat.

Altres idees: Hem rebut solucions, essencialment iguals, d'Esteve Casas Juncà, de St. Celoni i de Joaquim Martí i Marquès de Begues.

Altres solucions

Hem rebut solucions a problemes de la XXXIV Olimpíada Matemàtica dels següents socis: Esteve Casas Juncà de Sant Celoni les de tots els problemes; Blanca Augusta Costa López, problema 4; Jaume Sans Ciurana de l'Hospitalet, problema 5.

José Luis Yebra de la UPC ens ha enviat noves solucions als problemes A21 i A23. Recordem el problema A21:

A21. Un tauler d'escacs 6×6 s'omple amb fitxes de dòmino (2×1) ben col·locades, és a dir ocupant dos quadradets. Demostreu que sempre és possible tallar el tauler en dues parts mitjançant una línia recta que no talli cap fitxa.

Solució: (Solució de J. L. Yebra). Cada una de les 10 línies que marquen els quadrats del tauler separa el tauler en dos trossos amb un nombre parell de quadres. Així, el nombre de fitxes que travessen una línia qualsevol, tapant un quadre de cada costat ha de ser necessàriament parell. Amb 18 fitxes, com a molt podrem travessar 9 línies i, per tant, en quedarà almenys una que permetrà separar el tauler en dues parts sense tallar cap fitxa.

Recordem el problema A23:

A23. A l'illa de Camelot viuen 13 camaleons grisos, 15 de color marró i 17 de color lila. Si dos camaleons de diferent color es troben, canvien simultàniament al tercer color (per exemple, si es troben un camaleó gris i un de marró, tots dos canvien a lila). És possible que tots els camaleons de l'illa tinguin alhora el mateix color?

Solució: (Solució de J. L. Yebra). El canvi de color de dos camaleons, un de cada color, al tercer color, equival a passar de l'estat (a,b,c) a l'estat $(a-1,b-1,c+2)$. Les diferències $a-b$, $c-b$ i $c-a$, mòdul 3, no varien. Així per tal de poder arribar a un dels estats $(a+b+c,0,0)$, $(0,a+b+c,0)$ o $(0,0,a+b+c)$, les diferències $a-b$, $c-b$ i $c-a$ han de coincidir mòdul 3 amb $a+b+c$, 0 i $-a-b-c$. La condició necessària i suficient per tal que tots els camaleons tinguin el mateix color és que almenys dos dels valors inicials (a,b,c) siguin congruents mòdul 3, cosa que en el cas del problema $(13,15,17)$, no es compleix.